# 高校１年 数学Ⅰ「数と式（因数分解）」 練習問題②

## ■ 問題編

次の式を因数分解しなさい。

**(1)** $6x^2 - 5xy - 6y^2$

**(2)** $12x^2 + 7xy - 12y^2$

**(3)** $6x^2 - 13x - 15$

**(4)** $8x^2 - 26xy + 15y^2$

**(5)** $a^2b^2 - 4ab - 12$

**(6)** $x^2 - y^2 + 4y - 4$

**(7)** $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$

**(8)** $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 24$

**(9)** $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$

**(10)** $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

**(11)** $x^4 + x^2 + 1$

**(12)** $a^4 + 4b^4$

**(13)** $x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 3y - 2$

**(14)** $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 3x - 3y - 2$

**(15)** $3x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 4y + 3$

**(16)** $6x^2 - 5xy - 6y^2 + x + 5y - 1$

**(17)** $a^2c + ab^2 - b^2c - a^3$

**(18)** $x^2y + x^2 - y - 1$

**(19)** $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$

**(20)** $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

**(21)** $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$

**(22)** $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

**(23)** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

**(24)** $(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

**(25)** $x^5 + x + 1$

**(26)** $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

**(27)** $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

**(28)** $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

**(29)** $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$

**(30)** $x^8 + x^4 + 1$

## ■ 解答・解説編

**(1)** **解答:** $(2x-3y)(3x+2y)$
**解説:** $x$ と $y$ のたすき掛け。$2\times 2=4,\ 3\times(-3)=-9$ より、和が $-9+4=-5$。

**(2)** **解答:** $(3x+4y)(4x-3y)$
**解説:** たすき掛け：$3\times(-3)=-9,\ 4\times 4=16$ より、和が $16-9=7$。

**(3)** **解答:** $(6x+5)(x-3)$
**解説:** たすき掛け：$6\times(-3)=-18,\ 1\times 5=5$ より、和が $-18+5=-13$。

**(4)** **解答:** $(2x-5y)(4x-3y)$
**解説:** たすき掛け：$2\times(-3)=-6,\ 4\times(-5)=-20$ より、和が $-6-20=-26$。

**(5)** **解答:** $(ab-6)(ab+2)$
**解説:** $ab=X$ とおくと、$X^2-4X-12=(X-6)(X+2)$。

**(6)** **解答:** $(x+y-2)(x-y+2)$
**解説:** 後半をマイナスで括り完全平方を作る：$x^2-(y^2-4y+4)=x^2-(y-2)^2$。平方の差の公式を適用する。

**(7)** **解答:** $(x-4)(x+1)(x^2-3x+2)=(x-4)(x-2)(x-1)(x+1)$
**解説:** $x^2-3x=X$ とおくと、$X^2-2X-8=(X-4)(X+2)$。元に戻して $(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)=(x-4)(x+1)(x-2)(x-1)$。

**(8)** **解答:** $x(x-5)(x^2-5x+10)$
**解説:** 展開の組み合わせを工夫する：$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-24=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-24$。$x^2-5x=X$ とおくと $(X+4)(X+6)-24=X^2+10X=X(X+10)$。

**(9)** **解答:** $(x^2+8x+10)(x^2+8x+2)$
**解説:** $\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$。$x^2+8x=X$ とおくと $(X+7)(X+15)+15=X^2+22X+120=(X+10)(X+12)$。

**(10)** **解答:** $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$
**解説:** 複二次式の変形：$(x^4-2x^2y^2+y^4)-5x^2y^2$ では平方の差が作れないため、$(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$ とする。

**(11)** **解答:** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
**解説:** $x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$ と変形し、平方の差の公式を適用する。

**(12)** **解答:** $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$
**解説:** ソフィー・ジェルマンの恒等式。$a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$。

**(13)** **解答:** $(x-y-1)(x-2y+2)$
**解説:** $x$ について整理：$x^2-(3y+1)x+(2y^2+3y-2)$。定数項は $(2y-1)(y+2)$。全体をたすき掛けして和が $-(3y+1)$ となる組み合わせを探す。

**(14)** **解答:** $(2x+y-2)(x+2y+1)$
**解説:** $x$ について整理：$2x^2+(5y-3)x+(2y^2-3y-2)=2x^2+(5y-3)x+(2y+1)(y-2)$。全体をたすき掛けする。

**(15)** **解答:** $(3x+y-1)(x+y-3)$
**解説:** $x$ について整理：$3x^2+(4y-10)x+(y^2-4y+3)=3x^2+(4y-10)x+(y-1)(y-3)$。たすき掛けを行う。

**(16)** **解答:** $(2x-3y+1)(3x+2y-1)$
**解説:** $x$ について整理：$6x^2-(5y-1)x-(6y^2-5y+1)=6x^2-(5y-1)x-(2y-1)(3y-1)$。全体を複雑なたすき掛けで分解する。

**(17)** **解答:** $(a-b)(ab+bc+ca)$
**解説:** 最低次数の $c$ について整理：$c(a^2-b^2)-(a^3-ab^2)=c(a+b)(a-b)-a(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(c-a)=(a+b)(a-b)(c-a)$。
※別解変形：整理すると $(a-b)(ab+bc+ca)$ となる。

**(18)** **解答:** $(x+1)(x-1)(y+1)$
**解説:** $y$ について整理：$y(x^2-1)+(x^2-1)=(x^2-1)(y+1)=(x+1)(x-1)(y+1)$。

**(19)** **解答:** $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
**解説:** 展開して $a$ について整理すると、$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$ となり、共通因数 $(b+c)$ を括り出してたすき掛けを行う。

**(20)** **解答:** $(a-b)(b-c)(c-a)$
**解説:** 交代式の基本。$a$ について整理すると $-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=-(b-c)(a-b)(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a)$。

**(21)** **解答:** $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
**解説:** 展開すると $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$ となる。整理して因数分解すると $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ に至る。

**(22)** **解答:** $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
**解説:** $a$ について整理すると、$-(b-c)a^3+(b^3-c^3)a-bc(b^2-c^2)$。共通因数 $(b-c)$ を括り出すと $-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$。さらに括弧内を整理する。

**(23)** **解答:** $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
**解説:** 有名公式。$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$。

**(24)** **解答:** $3(x+y)(y+z)(z+x)$
**解説:** $x=-y$ を代入すると式全体が 0 になるため、$(x+y)$ を因数に持つ。対称性から $3(x+y)(y+z)(z+x)$ となる。

**(25)** **解答:** $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$
**解説:** $x^5+x^4+x^3-(x^4+x^3+x^2)+x^2+x+1$ のように項を補って変形する。$x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$。

**(26)** **解答:** $(x^2-x-1)^2$
**解説:** 複二次式・完全平方の探究。$(x^2-x-1)^2$ を展開すると一致する。または $x^4-2x^3-x^2+2x+1=(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1-x^2\ldots$ 等の工夫。

**(27)** **解答:** $(x^2-3x+1)(x^2-x+1)$
**解説:** 相反方程式の係数に類似。$x^2$ で括るアプローチ、または $(x^2-2x+1)^2-\ldots$ の変形。$(x^2-3x+1)(x^2-x+1)$ と分解できる。

**(28)** **解答:** $(a+b)(b+c)(c+a)$
**解説:** $a$ について整理：$(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)-abc=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=(b+c)(a+b)(a+c)$。

**(29)** **解答:** $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
**解説:** 問題 (19) や (21) の実質的な同値変形。展開して整理すると $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ となる。

**(30)** **解答:** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
**解説:** $x^8+x^4+1=(x^8+2x^4+1)-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$。前半をさらに (11) の要領で分解する。